View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

東北大学機関リポジトリ
TOUR
Tohoku University Repository

Studies on Gorenstein toric Fano varieties

著者	趙 懐亮
号	70
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第2940号
URL	http://hdl.handle.net/10097/64255

論　文　内　容　要　旨

氏　　名	趙　懐亮	提出年	平成 27 年
学位論文の 題　　　目	Studies on Gorenstein Toric Fano Varieties （ゴレンスタイン・トーリック・ファノ多様体の研究）		

論　文　目　次

Bibliography

論　文　要　旨

This thesis consists of the results based on the joint works [1] and [2] with Ogata. We give a characterization of Gorenstein toric Fano varieties with high indices. We also give a stronger version of Fujita's freeness conjecture on Gorenstein toric varieties.

A toric variety X is a normal algebraic variety containing an algebraic torus T_N as an open dense subset such that the group multiplication $T_N \times T_N \rightarrow T_N$ extends to an algebraic action $T_N \times X \rightarrow X$. A polarized toric variety (X,L), where L is an ample Cartier divisor on X, defines a lattice polytope P, and there is a one-to-one correspondence between polarized toric varieties and polytopes.

A Cohen-Macaulay normal variety X is called Gorenstein variety if its dualizing sheaf ω_X is invertible. A complete Gorenstein variety X is said to be a Fano variety if the anticanonical divisor $-K_X$ is ample. For a Gorenstein Fano variety X of dimension n, the number $i_X :=$ max{ $i \in \mathrm{N}$; $-K_X = iD$ for an ample divisor D} is called the Gorenstein Fano index, or simply the index. We call a variety of dimension n simply an n-fold.

A Gorenstein Fano variety X of dimension n is called Del Pezzo variety if its index is equal to $n-1$. Del Pezzo varieties of dimension 2 are called Del Pezzo surfaces, and they are classified by Demazure, Hidaka and Watanabe. Smooth Del Pezzo n-folds have been classified up to deformation by Fujita. All Gorenstein Del Pezzo varieties of dimension $n \geq 4$ have been classified up to deformation by Fujita.

Batyrev noticed that Gorenstein toric Fano varieties correspond to the reflexive polytopes. The reflexive polytope is a lattice polytope with the origin contained in its interior such that the dual polytope is also a lattice polytope. Reflexive polytopes satisfy a nice combinatorial duality which plays an important role in Mirror Symmetry.

In each fixed dimension n, there are only a finite number of reflexive polytopes up to a lattice isomorphism. This implies that there exist finitely many Gorenstein toric Fano varieties in each dimension up to biregular isomorphism. In fact, there exist exactly 16 reflexive polygons. Using a computer program, Kreuzer has found that there exist 31 kinds of 3-dimensional reflexive polytopes of index 2 and 36 kinds of 4-dimensional reflexive polytopes of index 3.

There are not so many n-dimensional reflexive polytopes with index n. In [1] Ogata and the author classified the lattice polytopes with only one lattice point contained in their n-multiple. Namely, let

$$P_n := \mathrm{Conv}\{0, 2e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ and } Q_n := \mathrm{Conv}\{0, e_1, e_2, e_1+e_2, e_3, \ldots, e_n\},$$

where $\{e_1, \ldots, e_n\}$ is a Z-basis. Then we have the following result.

Proposition 3.3.1. Assume $n \geq 2$. Let $P \subseteq M_R$ be a lattice n-polytope satisfying the condition

$\#\{\mathrm{Int}(nP) \cap M\} = 1$. Then P is Gorenstein, and it is isomorphic to P_n or Q_n by a unimodular transformation of M.

In terms of algebraic geometry, the above proposition can be interpreted as follows.

Theorem 3.1.3. Let X be a projective toric variety of dimension n ($n \geq 2$). We assume that there exists an ample line bundle L on X with $\dim\Gamma(X, L^{\otimes n} \otimes \omega_X) = 1$. Then X is a Gorenstein toric Fano variety of dimension n with index n.

Batyrev and Juny proved in [3] that there exist 37 reflexive polytopes with index $n-1$ up to a lattice isomorphism, for each dimension $n \geq 5$. Without using this result of classification of reflexive polytopes, we obtain a characterization of Gorenstein toric Del Pezzo n-folds in [2].

Proposition 4.1.5. Let P be a lattice n-polytope with $n \geq 2$. If $\#\{\mathrm{Int}((n-1)P) \cap M\} = 1$, then P is Gorenstein.

In terms of algebraic geometry, the above proposition can be interpreted as the union of the following two theorems.

Theorem 4.1.2. Let X be a projective toric surface. If X has an ample line bundle L with $\dim\Gamma(X, L \otimes \omega_X) = 1$ for the dualizing sheaf ω_X, then it is a Gorenstein toric Fano surface.

Theorem 4.1.3. Let X be a projective toric variety of dimension n with $n \geq 3$. If X has an ample line bundle L with $\dim\Gamma(X, L^{\otimes(n-1)} \otimes \omega_X) = 1$, then X is a Gorenstein toric Del Pezzo variety.

In this thesis, we also give a partial result of Fujita's conjecture.

Fujita gave a conjecture on the projective variety X of dimension n with only rational normal Gorenstein singularities as follows.

Conjecture. $\mathrm{Bs}|\,m(K_X+tL)\,| = \emptyset$ if $m > n+1-t$ and K_X+tL is nef.

Fujino proved the Logarithmic Base Point Freeness Theorem on projective toric varieties with any singularities by using the Mori Theory in [4], which is a proof of Fujita's conjecture on projective toric variety. Let X be a projective toric variety of dimension n, which is not isomorphic to the projective space $\mathbb{P}^n$. Let L be an ample line bundle on X. Fujino proved that if $L.C \geq n$ for every T-invariant curve C, then the adjoint bundle of L is nef.

We improved Fujino's result by restricting X to the Gorenstein toric varieties, that is, we proved that $L+K_X$ is nef if $L.C \geq n-1$ for every T-invariant curves with some exceptional cases.

Theorem 5.1.7. Let X be a Gorenstein projective toric variety of dimension n ($n \geq 2$). We assume that X is not the projective space, a $\mathbb{P}^{n-1}$-bundle over $\mathbb{P}^1$ nor a Gorenstein toric Fano n-fold with index n. If an ample line bundle L on X satisfies that $L.C \geq n-1$ for every irreducible T-invariant curve C, then the adjoint bundle $L+K_X$ is nef.

We proved it by using elementary combinatorial methods on the corresponding polytopes.

Bibliography

[1] S.Ogata and H-L.Zhao, A characterization of Gorenstein toric Fano n-folds with index n and Fujita's conjecture, Far East J. Math. Sci. (FJMS) 94(1) (2014), 65-88.

[2] S.Ogata and H-L.Zhao, A characterization of Gorenstein toric Del Pezzo n-folds, Far East J. Math. Sci. (FJMS) 96(8) (2015), 1049-1064.

[3] V.Batyrev and D.Juny, Classification of Gorenstein toric Del Pezzo varieties in arbitrary dimension, Mosc. Math. J. 10(2) (2010), 285-316.

[4] O.Fujino, Notes on toric varieties from Mori theoretic viewpoint, Tohoku Math. J. 55 (2003), 551-564.

論文審査の結果の要旨

ゴレンスタイン・ファノ多様体のうちで、指数の高いもの、特に指数が多様体の次元以上のものは、分類されてある程度良く解っている。指数が次元より１だけ低いものは、デルペッゾ多様体と呼ばれ、藤田により変形類の有限性が示されている。トーリック多様体であってゴレンスタイン・ファノ多様体でもあるものについて、各次元で同型類が有限個であることが知られている。

トーリック多様体とその上のアンプル直線束の組が整凸多面体と１対１に対応していることにより、ゴレンスタイン・トーリック・ファノ多様体の分類は回帰的整凸多面体の分類に帰着することが、バチレフにより示された。これにより、次元の低い方から非特異トーリック・ファノ多様体の分類が多くの研究者により実行され、次元を入力すると同型類の個数を出力するコンピュータソフトウエアが開発された。また、バチレフとジュニーにより、ゴレンスタイン・トーリック・デルペッゾ多様体の分類がなされた。

趙懐亮は、尾形との共同研究において、トーリック多様体がどのような条件のもとで指数の高いゴレンスタイン・ファノ多様体になるかの判定条件を見いだした。さらに、この条件を指数のより低い場合には適用できないことを示す例を４次元以上の各次元に構成した。ゴレンスタイン・トーリック・ファノ多様体の反標準束は、内部にただ一つの格子点を含む整凸多面体に対応するが、逆に、内部にただ一つの格子点を含む整凸多面体の定めるトーリック多様体は、必ずしもゴレンスタイン多様体とは限らない。数理物理学に関連する数学研究の中では、４次元と５次元のゴレンスタイン・トーリック・ファノ多様体の例が多く計算されているが、そのなかには、整凸多面体が内部にただ一つの格子点を含むことのみ確かめて、ゴレンスタイン性の確認を怠っているものがある。これらの研究に対して、注意を促すものである。

趙懐亮は、トーリック多様体のゴレンスタイン性が、アンプル直線束に対応する整凸体の各頂点の性質であることに気付き、整凸体の正規性を巧みに利用して、ゴレンスタイン性を導きだすための条件を見いだした。また、この研究過程で、共同研究者の尾形の予想しなかった４次元以上に現れる整凸体の性質を見抜き、考慮すべきいくつかの場合を補った。

また、アンプル直線束の随伴束のネフ性に関する藤田の問題についても、標数が０の場合に成り立つ森理論を使った藤野やペインの結果を、ゴレンスタイン・トーリック多様体に限っているが任意標数の場合に拡張して、対応する結果を得た。トーリック多様体に対する藤田の問題に関して、有理ゴレンスタイン等のより広い場合について、森理論を使わない研究法も期待できる。

以上のことは、自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、趙懐亮提出の博士論文は、博士（理学）の学位論文として合格と認める。